第 23 講　積分でやっておくこと（その１）

23

［A］　座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=r(t)\cos t$, $y=r(t)\sin t$ で与えられている．ただし，$r(t)=1+\cos t$ であるとする．

(1)　$0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲で，点Ｐの速さ（速度の大きさ）が１となる時刻を求めよ．

(2)　$0\leqq t\leqq 2\pi$ の間に，点Ｐが動いた道のりを求めよ．

［B］　$x>0$ に対して関数

$$f(x)=\frac{3}{x^3}\int_0^x |t^2-x|\,dt$$

を考える．

(1)　関数 $f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(3)　関数 $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　積分でやっておくこと（その１）

23　実数 t に対して，$f(t)=\int_0^1 |e^{-x}-t|\,dx$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$f(t)$ を求めよ．

(2)　$f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　積分でやっておくこと（その１）

23

［A］ 座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=r(t)\cos t$, $y=r(t)\sin t$ で与えられている．ただし，$r(t)=1+\cos t$ であるとする．

(1) $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲で，点Ｐの速さ（速度の大きさ）が１となる時刻を求めよ．

(2) $0\leqq t\leqq 2\pi$ の間に，点Ｐが動いた道のりを求めよ．

［B］ $x>0$ に対して関数

$$f(x)=\frac{3}{x^3}\int_0^x|t^2-x|\,dt$$

を考える．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

【答】 ［A］ (1) $t=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$　(2) 8

［B］ (1) $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x\sqrt{x}} & (x\geqq 1)\\ -1+\dfrac{3}{x} & (0<x<1)\end{cases}$　(2) $\frac{3}{4}$ $(x=4)$　(3) 略

【解説】

［A］ (1)

$$\text{速度 }\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$
$$=(r'(t)\cos t-r(t)\sin t,\ r'(t)\sin t+r(t)\cos t)$$

より

$$|\vec{v}|^2=\{r'(t)\cos t-r(t)\sin t\}^2+\{r'(t)\sin t+r(t)\cos t\}^2$$
$$=\{r'(t)\}^2+\{r(t)\}^2$$
$$=(-\sin t)^2+(1+\cos t)^2$$
$$=2(1+\cos t)$$

となるので

$$|\vec{v}|=1\iff\cos t=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \boldsymbol{t=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$$

(2) $|\vec{v}|^2=4\cos^2\frac{t}{2}$ より道のり l は

$$l=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$$
$$=\int_0^{\pi}4\cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$=\left[8\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{8}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1)(Ⅰ)　$x \geqq 1$ のとき

$\sqrt{x} \leqq x$ より $0 \leqq t < \sqrt{x}$ で $t^2 - x < 0$，$\sqrt{x} \leqq t \leqq x$ で $t^2 - x \geqq 0$ となるので

$$\frac{x^3}{3} f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} (-t^2 + x)\,dt + \int_{\sqrt{x}}^{x} (t^2 - x)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + xt\right]_0^{\sqrt{x}} + \left[\frac{1}{3}t^3 - xt\right]_{\sqrt{x}}^{x}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{x}$$

(Ⅱ)　$0 < x < 1$ のとき

$0 \leqq t \leqq x$ において $t^2 - x \leqq 0$ となるので

$$\frac{x^3}{3} f(x) = \int_0^{x} (-t^2 + x)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + xt\right]_0^{x} = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$$

(Ⅰ)(Ⅱ)より　$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x\sqrt{x}} & (x \geqq 1) \\ -1 + \dfrac{3}{x} & (0 < x < 1) \end{cases}}$

(2)　$x > 1$ のとき

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^2\sqrt{x}} = \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{x^2\sqrt{x}}$$

$0 < x < 1$ のとき

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0$$

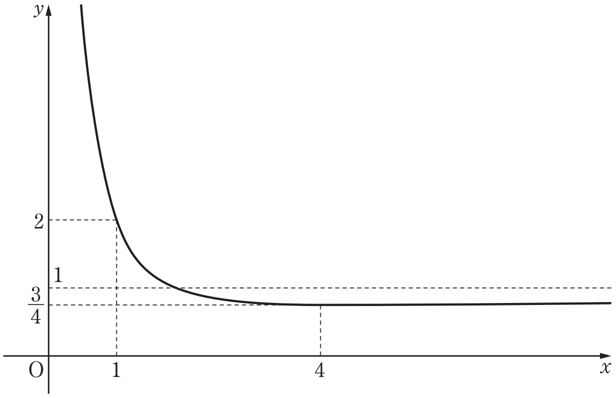
となるので，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	(-3)	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	2	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1

よって $f(x)$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$　**$(x = 4)$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$\lim_{x \to +0} f(x) = \infty$，$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$，$f(1) = 2$ などにより



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　積分でやっておくこと（その１）

23　実数 t に対して，$f(t)=\int_0^1|e^{-x}-t|\,dx$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$f(t)$ を求めよ．

(2)　$f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

【答】　(1) $f(t)=\begin{cases} -t+1-\dfrac{1}{e} & \left(t\leqq\dfrac{1}{e}\right) \\ -t+2t\log t+1+\dfrac{1}{e} & \left(\dfrac{1}{e}<t<1\right) \\ t-1+\dfrac{1}{e} & (t\geqq 1) \end{cases}$

(2) $t=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2$

【解説】

(1)　(Ⅰ)　$t\leqq\dfrac{1}{e}$ のとき $0<x<1$ において $e^{-x}-t>0$ であるので

$$\begin{aligned} f(t)&=\int_0^1(e^{-x}-t)\,dx \\ &=\Big[-e^{-x}-tx\Big]_0^1 \\ &=\boldsymbol{-t+1-\frac{1}{e}} \end{aligned}$$

(Ⅱ)　$\dfrac{1}{e}<t<1$ のとき

$$\begin{cases} 0<x<-\log t \text{ において}\quad e^{-x}-t>0 \\ -\log t<x<1 \text{ において}\quad e^{-x}-t<0 \end{cases}$$

であるので，

$$\begin{aligned} f(t)&=\int_0^{-\log t}(e^{-x}-t)\,dx+\int_{-\log t}^1(-e^{-x}+t)\,dx \\ &=\Big[-e^{-x}-tx\Big]_0^{-\log t}+\Big[e^{-x}+tx\Big]_{-\log t}^1 \\ &=\boldsymbol{-t+2t\log t+1+\frac{1}{e}} \end{aligned}$$

(Ⅲ)　$t\geqq 1$ のとき $0<x<1$ において $e^{-x}-t<0$ であるので

$$\begin{aligned} f(t)&=\int_0^1(-e^{-x}+t)\,dx \\ &=\boldsymbol{t-1+\frac{1}{e}}\quad ((\text{Ⅰ})\text{より}) \end{aligned}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$t \leqq \dfrac{1}{e}$ のとき $f(t)$ は単調減少で，$t \geqq 1$ のとき $f(t)$ は単調増加であるので最小値があるのは $\dfrac{1}{e} \leqq t \leqq 1$ の区間に限る．このとき

$$f'(t)=2\log t+1$$

より $f(t)$ の増減は

t	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

となるので，$f(t)$ の最小値は　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ のとき

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{e}}+1+\frac{1}{e}$$

$$=\boldsymbol{\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。